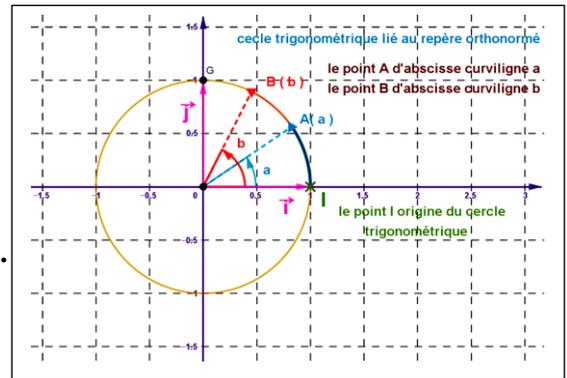


**I. Formules de transformations  $\sin(a \pm b)$  ;  $\cos(a \pm b)$  ;  $\tan(a \pm b)$  :**

**01. Transformation de  $\cos(a+b)$  puis  $\sin(a+b)$  :**

- Le plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté au repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- $\mathcal{C}(O,1)$  est le cercle trigonométrique lié au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- **A et B et I** trois points de  $(\mathcal{P})$  tel que :  $\vec{OI} = \vec{i}$  et **a et b** sont abscisses curvilignes respectivement de **A et B**.
- On rappelle : mesure de l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OA})$  est **a** c.à.d.  $(\vec{OI}, \vec{OA}) \equiv a \pmod{2\pi}$  ou encore  $(\vec{OI}, \vec{OA}) = a + 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$ .
- On rappelle : mesure de l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OB})$  est **b** c.à.d.  $(\vec{OI}, \vec{OB}) \equiv b \pmod{2\pi}$  ou encore  $(\vec{OI}, \vec{OB}) = b + 2k\pi ; (k \in \mathbb{Z})$



- 1 Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ .
- 2 Calculer :  $(\vec{OB}, \vec{OA})$  en fonction de **a et b**.
- 3 Calculer le produit scalaire  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  de deux façons différentes.
- 4 On déduit la formule de  $\cos(a-b)$  et  $\cos(a+b)$ .
- 5 On déduit la formule de  $\sin(a+b)$  et  $\sin(a-b)$ .

**02. Propriété :**

Pour tous **a et b** de  $\mathbb{R}$  on a :

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

**03. Conséquences :**

Le cas où **a = b** on obtient :

- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$  et  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ .
- D'après  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$  on obtient :  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ .
- $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$  et  $\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$

**04. Application :**

**1** Trouver la valeur de  $\cos \frac{7\pi}{12}$ . On a :

$$\cos \frac{7\pi}{12} = \cos \left( \frac{3\pi + 4\pi}{12} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Conclusion :**  $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

**2** Calculer :  $\cos \frac{\pi}{8}$

**Correction :**

On a :  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$  on prend  $a = \frac{\pi}{8}$  d'où  $\cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ .

Par suite  $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}}$  ou  $\cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}}$  mais  $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$  donc  $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ .

**Conclusion :**  $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$

**05.** Transformation de :  $\tan(a+b)$

- a et b de  $\mathbb{R}$**  tel que :  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**1** Déterminer  $\tan(a+b)$  en fonction de  $\sin a$  ;  $\cos b$  ;  $\cos a$  et  $\sin b$ .

**2** Déterminer  $\tan(a+b)$  en fonction de  $\tan a$  et  $\tan b$  ( on peut factoriser par  $\frac{1}{\cos a \times \cos b}$

**3** On déduit :  $\tan(a-b)$  et  $\tan(2a)$

**06.** Propriété :

**a et b de  $\mathbb{R}$**  tel que :  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  . on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b} \text{ et } \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} \text{ et } \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} .$$

**II.** Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes :

**01.** Activité :

D'après les formules  $\cos(a \pm b)$  et  $\sin(a \pm b)$  .

**1** Simplifier :  $\cos(a+b) + \cos(a-b)$  et  $\cos(a+b) - \cos(a-b)$  et  $\sin(a+b) + \sin(a-b)$  et  $\sin(a+b) - \sin(a-b)$  .

**2** On déduit les formules de transformations de :  $\cos a \times \cos b$  et  $\sin a \times \sin b$  et  $\sin a \times \cos b$  .

**3** On pose :  $a + b = x$  et  $a - b = y$  écrire **a et b** en fonction de **x et y** .

**4** On déduit les formules de :  $\cos x + \cos y$  et  $\cos x - \cos y$  et  $\sin x + \sin y$  et  $\sin x - \sin y$  en fonction de  $\sin \frac{x-y}{2}$  ;  $\cos \frac{x+y}{2}$  ;  $\cos \frac{x-y}{2}$  et  $\sin \frac{x+y}{2}$  .

**5** On déduit les formules de transformations obtenues .

**02.** Propriété :

$a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  on a :

Transformations des sommes à des produits	Transformations des produits à des sommes
$\cos a + \cos b = 2 \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$	$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\cos a - \cos b = -2 \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \sin \left( \frac{a-b}{2} \right)$	$\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
$\sin a + \sin b = 2 \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right)$	$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$
$\sin a - \sin b = 2 \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \sin \left( \frac{a-b}{2} \right)$	

**03.** Exemple :

**1** Trouver la valeur de chaque expressions :  $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\cos \frac{\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$ .

$$\text{On a : } \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \left( \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \right) \times \cos \left( \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \times \cos \frac{\pi}{6} = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

**Conclusion :**  $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**III.** D'autres formules de transformations :

**A.** Transformation de :  $a \cos x + b \sin x$  :

**01.** Activité :

$a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^*$ , on considère l'expression suivante  $A = a \cos x + b \sin x$ .

**1** Factoriser l'expression  $A$  en fonction de  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

**2** Trouver une écriture de  $A$  sous la forme de  $\sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(x + \alpha)$  ou  $\sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(x - \alpha)$  avec  $\alpha$  de  $\mathbb{R}$  (on remarque que  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ).

**3** Donner les deux transformations obtenues.

**02.** Propriété :

$a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}^*$  ; on a :

- $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(x + \alpha)$  ; ( avec  $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ).
- $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(x - \alpha)$  ; ( avec  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  ).

**03.** Exemple :

**1** Trouver une transformation de  $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x$ .

$$\text{On a : } \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) = 2 \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

**B.** Transformations de :  $\cos x$  ;  $\tan x$  et  $\sin x$  en fonction de  $t = \tan \frac{x}{2}$ .

**01.** Activité :

On pose :  $x \neq \pi + 2k\pi$  et  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**1** On rappelle que :  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$  et  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$  écrire ses deux formules avec  $2a = x$ .

**2** On pose :  $t = \tan \frac{x}{2}$  trouver  $\cos x$  ;  $\sin x$  et  $\tan x$  en fonction de  $t$  ( on peut diviser le

numérateur et le dénominateur par  $\cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{x}{2} \right) = 1$  )

**Correction pour  $\sin x$  :**

$$\text{On a : } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \frac{\frac{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2 \frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = 2 \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = 2 \frac{t}{1 + t^2}$$

**02.** Propriété :

On pose :  $t = \tan \frac{x}{2}$  avec  $x \neq \pi + 2k\pi$  et  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

On a :  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  et  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  et  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

**03.** Exemple :

Calculer :  $\tan \frac{\pi}{8}$ .

**Correction :**

On a :  $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$  avec  $t = \tan \frac{a}{2}$  et on prend  $a = \frac{\pi}{4}$ .

$$\text{D'où : } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

Donc  $\Delta' = 1$  par suite on a deux solutions :  $t_1 = -1 + \sqrt{2}$  et  $t_2 = 1 + \sqrt{2}$

On a :  $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$  donc  $\tan 0 < \tan \frac{\pi}{8} < \tan \frac{\pi}{4}$  d'où :  $0 < \tan \frac{\pi}{8} < 1$  la solution acceptée est  $t_1 = -1 + \sqrt{2}$ .

Conclusion :  $\tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$ .

#### IV. Rappel sur les équations trigonométriques :

##### A. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

###### 01. Propriété :

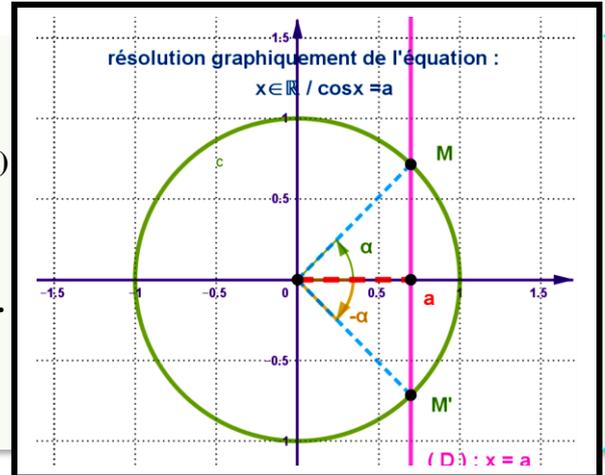
$a$  est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation  $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$  est :

- Si  $a \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  alors  $S = \emptyset$  (pas de solution)
- Si  $a \in [-1, 1]$  on cherche  $\alpha$  tel que  $a = \cos \alpha$  d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} .$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{ \alpha + 2k\pi , -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} .$$



###### 02. Cas particuliers :

- $a = 1$  on a :  $S = \{ 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$  .  $a = -1$  on a :  $S = \{ \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$  .
- $a = 0$  on a :  $S = \{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

###### 03. Exemple :

Résoudre l'équation : (E) :  $x \in \mathbb{R} / \cos x = \frac{1}{2}$ .

$$\text{On a : } \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} .$$

Conclusion : l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :  $S = \{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi , -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$  .

##### B. Equation de la forme : $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

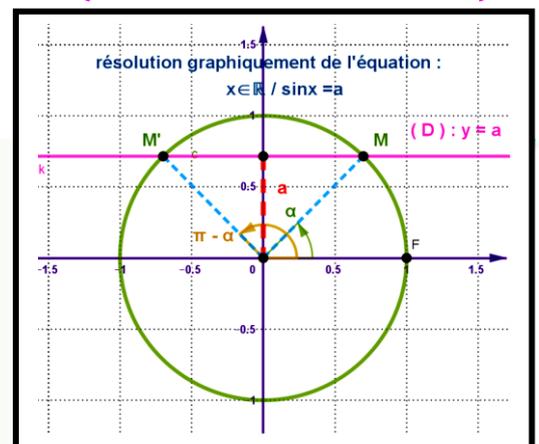
###### 01. Propriété :

$a$  est un nombre réel donné ensemble de solutions de l'équation  $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$  est :

- Si  $a \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  alors  $S = \emptyset$  (pas de solution) .
- Si  $a \in [-1, 1]$  on cherche  $\alpha$  tel que  $a = \sin \alpha$  d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} .$$

Par suite ensemble de solutions de l'équation est :  $S = \{ \alpha + 2k\pi , \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$  .



**02.** Cas particuliers :

$a = 1$  on a :  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  $a = -1$  on a :  $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  $a = 0$  on a :  $S = \{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

**03.** Exemple : Résoudre l'équation : (E) :  $x \in \mathbb{R} / \sin x = \frac{1}{2}$ .

On a :  $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}.$

**Conclusion :** l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

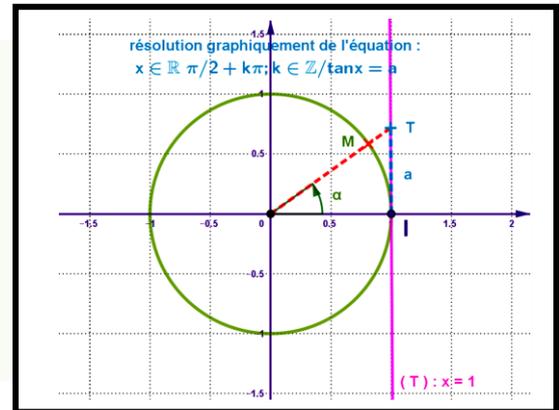
**C.** Equation de la forme :  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan x = a$

**01.** Propriété :

a est un nombre réel donné pour résoudre

l'équation (E) :  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} : \tan x = a$ .

- on cherche  $\alpha$  tel que  $a = \tan \alpha$  d'où :
- $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ .
- Par suite ensemble de solutions de l'équation est :  $S = \{ \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$ .



**D.** Equation de la forme :  $x \in \mathbb{R} : a \cos x + b \sin x = c$ .

**01.** Activité :

**I** Résoudre l'équation suivante de deux façons différentes : (E) :  $x \in \mathbb{R} : \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1$ .

**02.** Propriété :

Pour résoudre l'équation suivante (E) :  $x \in \mathbb{R} : a \cos x + b \sin x = c$  on suit les étapes suivantes :

**1<sup>ère</sup> étape :**

- On écrit l'équation sous la forme suivante (E)  $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right] = c$ .
- Puis on l'écrit (E)  $\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x] = c$  (ou  $\sqrt{a^2 + b^2} [\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x] = c$ )
- Puis on l'écrit (E)  $\Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (ou  $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ).

**2<sup>ème</sup> étape :**

- Au lieu de résoudre l'équation (E) :  $x \in \mathbb{R} : a \cos x + b \sin x = c$  on résout l'équation :

$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (ou  $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ )

3<sup>ème</sup> étape :

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de  $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ .

- Si  $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$  l'équation n'a pas de solution ;  $S = \emptyset$
- Si  $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$  on cherche  $\beta$  tel que  $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$  ( ou  $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$  ) d'où  
 $(E) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$  ( ou  $\sin(x+\alpha) = \sin\beta$  ) .

## 03.

Exemple :

Résoudre l'équation : (E) :  $x \in \mathbb{R} : \cos 3x + \sin 3x = 1$  . on a :

$$\begin{aligned} \cos 3x + \sin 3x = 1 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \left[ \cos \frac{\pi}{4} \cos 3x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right] = 1 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - 3x \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \left( \frac{\pi}{4} - 3x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos \left( \frac{\pi}{4} - 3x \right) = \cos \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{4} - 3x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3} \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**Conclusion :** l'ensemble de solutions de l'équation (E) est :  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{2k\pi}{3}, -\frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

